Kasus khusus yang ada pada masalah PL dengan metode simpleks adalah:

1. Terjadinya Kemerosotan (Degenerate)

2. Tidak Mempunyai Penyelesaian/Solusi Optimum

3. Ada Pilihan Penyelesaian/Solusi Optimum

4. Masalah PL dengan Variabel Tak Bersyarat Tanda

Pada pertemuan ini kita juga akan mempelajari Metode Simpleks Dua Tahap sebagai alternatif menyelesaikan masalah PL dengan algoritma metode simpleks, dengan sedikit modifikasi pada algoritma metode simpleksnya.

Mari kita kupas satu persatu.

**Kasus-kasus Khusus pada Masalah PL Metode Simpleks**

1. **Kemerosotan (*Degenerate*)**

yaitu adanya variabel slack atau surplus sebagai variabel basis di dalam tabel optimum. Namun keadaan ini tidak mempengaruhi solusi optimal masalah.

**Contoh:**

Memaksimumkan dengan kendala

.

**Penyelesaian:**

Ubah masalah kebentuk kanonik

Memaksimumkan dengan kendala

.

Matriks kanonik masalah

Tabel awal

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Masih ada , tabel belum optimum. merupakan nilai negatif terkecil, sehingga kolom menjadi kolom kunci, menjadi variabel masuk. menjadi rasio terkecil, sehingga baris menjadi baris kunci, menjadi variabel keluar. Perbaiki tabel.

Rumus OBE:

Tabel Kedua

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Masih ada , tabel belum optimum. merupakan nilai negatif terkecil, sehingga kolom menjadi kolom kunci, menjadi variabel masuk. menjadi rasio terkecil, sehingga baris menjadi baris kunci, menjadi variabel keluar. Perbaiki tabel.

Rumus OBE:

Tabel Ketiga

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

**Kesimpulan:** Karena maka tabel optimal dengan nilai maksimum pada plb . Namun marsih ada variabel slack sebagai variabel basis. Hal ini tidak mempengaruhi optimal. Namun dikatakan masalah PL mengalami kemerosotan.

1. **Tidak Mempunyai Penyelesaian Optimum**
2. Bila elemen kolom kunci tidak ada yang positif, maka fungsi tujuan menjadi tak terbatas dan soal asli tidak mempunyai penyelesaian optimum.

**Contoh:**

Memaksimumkan dengan kendala

.

**Penyelesaian:**

Ubah masalah kebentuk kanonik

Memaksimumkan dengan kendala

.

Matriks kanonik masalah

Tabel awal

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | 0 |  |  |  |  |

Masih ada , tabel belum optimum. merupakan nilai negatif terkecil, sehingga kolom menjadi kolom kunci, menjadi variabel masuk. menjadi rasio terkecil, sehingga baris menjadi baris kunci, menjadi variabel keluar. Perbaiki tabel.

Rumus OBE:

Tabel Kedua

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Masih ada , tabel belum optimum. merupakan nilai negatif terkecil, sehingga kolom menjadi kolom kunci, menjadi variabel masuk. menjadi rasio terkecil, sehingga baris menjadi baris kunci, menjadi variabel keluar. Perbaiki tabel.

Rumus OBE:

Tabel Ketiga

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Kesimpulan:** Karena masih ada yang negatif, maka tabel belum optimal, namun kolom kunci tidak ada yang positif (bernilai negatif atau nol) sehingga rasio tidak ada. Dalam soal ini fungsi tujuan menjadi tak terbatas dan soal asli tidak mempunyai penyelesaian optimum.

1. Bila pada uji optimum sudah tidak yang negatif, artinya tabel sudah optimum, namun terdapat variabel artifisial sebagai variabel basis, berarti soal asli tidak layak, dan penyelesaian optimum tidak ada.

**Contoh:**

Memaksimumkan dengan kendala

.

**Penyelesaian:**

Ubah masalah kebentuk kanonik

Memaksimumkan dengan kendala

.

Matriks kanonik masalah

Tabel awal

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | 1 |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Masih ada , tabel belum optimum. merupakan nilai negatif terkecil, sehingga kolom menjadi kolom kunci, menjadi variabel masuk. menjadi rasio terkecil, sehingga baris menjadi baris kunci, menjadi variabel keluar. Perbaiki tabel.

Rumus OBE:

Tabel Kedua

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | 1 |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Kesimpulan:** Karena sudah tidak ada yang negatif, maka tabel optimal, namun masih ada variabel artifisial sebagai variabel basis. Dalam soal ini dikatakan soal asli tidak layak, dan penyelesaian optimum tidak ada.

1. **Ada Pilihan Penyelesaian Optimum**

Bila dalam tabel optimum bukan variabel basis, namun nilai , maka ada pilihan penyelesaian optimum, yaitu dengan memasukkan sebagai variabel basis dan dibentuk tabel baru.

**Contoh:**

Memaksimumkan dengan kendala

.

Penyelesaian:

Masalah diubah menjadi bentuk kanonik

Memaksimumkan dengan kendala

.

Matriks kanonik masalah

Tabel awal

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Masih ada , tabel belum optimum. merupakan nilai negatif terkecil, sehingga kolom menjadi kolom kunci, menjadi variabel masuk. menjadi rasio terkecil, sehingga baris menjadi baris kunci, menjadi variabel keluar. Perbaiki tabel.

Rumus OBE:

Tabel Kedua

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Masih ada , tabel belum optimum. merupakan nilai negatif terkecil, sehingga kolom menjadi kolom kunci, menjadi variabel masuk. menjadi rasio terkecil, sehingga baris menjadi baris kunci, menjadi variabel keluar. Perbaiki tabel.

Rumus OBE:

Tabel Ketiga

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

**Kesimpulan:** Karena sudah tidak ada yang negatif, maka tabel optimal. Dengan nilai maksimum pada plb . Namun pada baris masih ada yang bernilai nol namun bukan variabel basis, yaitu . Dalam soal ini ada pilihan penyelesaian optimum, yaitu dengan memasukkan sebagai variabel basis dan dibentuk tabel baru.

Berikut adalah masalah PL jika ada satu atau lebih variabel tak diberi syarat tanda. Sejatinya dalam masalah PL suatu variabel mempunyai syarat harus non negatif, namun pada bagian ini syarat tersebut memang tidak ditemukan, sehingga bagaimana kita menyikapi masalah tersebut? Kita harus memisalkan variabel tak bertanda tersebut sebagai dua variabel non negatif, yang memenuhi persamaan berikut . Untuk lebih jelasnya, kita lihat langsung saja.

1. **Masalah PL dengan Variabel Tak Bersyarat Tanda**

Misalkan ada variabel tidak bersyarat tanda, maka dipecah menjadi dua variabel dan dengan , selanjutnya variabel baru ini dimasukkan kembali ke dalam soal sehingga soal memenuhi syarat semua variabelnya non negatif.

Selanjutnya soal diselesaikan dengan algoritma simpleks seperti biasa. Namun harus diperhatikan tanda untuk variabel pada hasil akhir seperti rumusan berikut:

Bila dalam hasil akhir

1. , berarti
2. , berarti
3. , berarti

**Contoh 1.**

Tentukan dan yang memaksimumkan dan memenuhi

.

**Penyelesaian:**

belum bersyarat tanda, sehingga variabel diubah menjadi dengan . Kendala masalah menjadi

Masalah diubah menjadi bentuk kanonik

Matriks kanonik masalah

Tabel awal

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Masih ada , tabel belum optimum. merupakan nilai negatif terkecil, sehingga kolom menjadi kolom kunci, menjadi variabel masuk. menjadi rasio terkecil, sehingga baris menjadi baris kunci, menjadi variabel keluar. Perbaiki tabel.

Rumus OBE:

Tabel Kedua

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Masih ada , tabel belum optimum. merupakan nilai negatif terkecil, sehingga kolom menjadi kolom kunci, menjadi variabel masuk. menjadi rasio terkecil, sehingga baris menjadi baris kunci, menjadi variabel keluar. Perbaiki tabel.

Rumus OBE:

Tabel Ketiga

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Masih ada , tabel belum optimum. merupakan nilai negatif terkecil, sehingga kolom menjadi kolom kunci, menjadi variabel masuk. menjadi rasio terkecil, sehingga baris menjadi baris kunci, menjadi variabel keluar. Perbaiki tabel.

Rumus OBE:

Tabel Keempat

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Tampak untuk semua , sehingga tabel sudah optimal dengan nilai maksimum pada plb atau .

Catatan: Ada pada variabel , sehingga pada kasus khusus ini juga ada pilihan solusi. Silahkan dicoba!

Kasus khusus yang mungkin terjadi pada masalah PL dengan penyelesaian menggunakan metode simpleks sudah selesai kita bahas. Selanjutnya kita bahas metode alternatif untuk menyelesaikan masalah PL dengan metode simpleks jika masalah mempunyai kendala lebih dari sama dengan (), yaitu Metode Simpleks Dua Tahap. Mari kita kupas bersama.

**Metode Simpleks Dua Tahap (MSDT)**

Metode Simpleks dua tahap ini diperuntukkan mempermudah penyelesaian masalah PL yang memuat variabel artifisial, terutama apabila masalah PL akan diselesaikan menggunakan program komputer. Metode ini bekerja dengan dua tahapan penyelesaian, yang masing-masing tahapannya menuntut penyelesaian optimum.

**Metode simpleks dua tahap terdiri dari:**

1. Tahap I

Tahap ini digunakan untuk menentukan apakah soal asli mempunyai penyelesaian layak?

Jika penyelesaian layak ada, maka pada tahap ini akan diperoleh penyelesaian layak basis untuk tabel Tahap II.

1. Tahap II

Tahap ini digunakan untuk menghasilkan penyelesaian optimal bagi soal aslinya.

**Langkah-langkah Penyelesaian :**

**Tahap I**

1. Pada bentuk kanonik, semua nilai dari variabel soal asli, variabel slack, dan variabel surplus diberi nilai nol.
2. Sedangkan dari variabel artifisial diberi nilai .

Tabel pada keadaan ini diselesaikan dengan metode simpleks, hingga diperoleh hasil optimum. Jika dari tabel optimum tersebut diperoleh kemungkinan:

1. dan semua variabel artifisial menjadi variabel non basis, maka penyelesaian layak basis awal untuk soal asli diperoleh.

Penyelesaian optimal dapat diperoleh melalui Tahap II.

1. dan ada variabel artifisial yang menjadi variabel basis dengan nilai nol, maka penyelesaian layak basis awal soal asli diperoleh. Kasus ini mengindikasikan adanya kelebihan kendala pada soal asli.

Penyelesaian optimal dapat diperoleh melalui Tahap II dengan membuang kelebihan kendala tersebut.

1. dan ada variabel artifisial yang menjadi variabel basis dengan nilai positif, maka soal asli merupakan kasus tidak layak.

Penyelesaian optimal tidak dapat diperoleh, Tahap II tidak perlu dikerjakan.

**Tahap II**

Pada tahap ini perlu diperhatikan hal-hal berikut ini:

1. Jika hasil Tahap I adalah kasus (i), yaitu dan semua variabel artifisial menjadi variabel non basis, maka tabel Tahap II adalah tabel optimal Tahap I dengan:

1). Menghilangkan semua variabel artifisial .

2). pada bentuk kanonik awal digunakan lagi.

Selanjutnya tabel diselesaikan dengan metode simpleks hingga diperoleh penyelesaian optimum dan dapat disimpulkan sebagai hasil soal aslinya.

1. Jika hasil Tahap I adalah kasus (ii), yaitu dan ada variabel artifisial yang menjadi variabel basis dengan nilai nol, maka tabel Tahap II adalah tabel optimum Tahap I dengan:

1). Baris dengan variabel artifisial sebagai variabel basis dihilangkan dari tabel.

2). Tabel tidak memuat variabel artifisial.

3). pada bentuk kanonik awal digunakan lagi.

Selanjutnya tabel diselesaikan dengan metode simpleks hingga diperoleh penyelesaian optimum dan dapat disimpulkan sebagai hasil soal aslinya.

**Contoh 1.**

Selesaikanlah masalah PL berikut dengan metode simpleks dua tahap.

Meminimumkan

Terhadap kendala

.

**Penyelesaian:**

Bentuk kanonik masalah tersebut adalah:

Dengan memasukkan variabel surplus dan variabel artifisial , kendala menjadi:

.

Yang memaksimumkan .

Masalah akan diselesaikan dengan metode simpleks dua tahap, maka pada Tahap I fungsi tujuan dalam bentuk kanonik diubah menjadi:

Memaksimumkan .

Tahap I

Tabel Awal Simpleks

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 0 | 0 | 0 | 0 |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Masih ada , tabel belum optimum. merupakan nilai negatif terkecil, sehingga kolom menjadi kolom kunci, menjadi variabel masuk. menjadi rasio terkecil, sehingga baris menjadi baris kunci, menjadi variabel keluar. Perbaiki tabel.

Rumus OBE:

Tabel Kedua

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 0 | 0 | 0 | 0 |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Masih ada , tabel belum optimum. merupakan nilai negatif terkecil, sehingga kolom menjadi kolom kunci, menjadi variabel masuk. menjadi rasio terkecil, sehingga baris menjadi baris kunci, menjadi variabel keluar. Perbaiki tabel.

Rumus OBE:

Tabel Ketiga

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 0 | 0 | 0 | 0 |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Karena , maka tabel sudah optimal, terlihat tidak ada variabel artifisial sebagai variabel basis dan . Dilanjutkan ke tabel Tahap II.

Tahap II

Tabel awal simpleks

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | 0 | 0 |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

Masih ada , tabel belum optimum. merupakan nilai negatif terkecil, sehingga kolom menjadi kolom kunci, menjadi variabel masuk. menjadi rasio terkecil, sehingga baris menjadi baris kunci, menjadi variabel keluar. Perbaiki tabel.

Rumus OBE:

Tabel Ketiga

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | 0 | 0 |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

Karena , maka tabel sudah optimal dengan plb: pada .

**Tugas 7.**

1. Tentukan solusi optimal masalah program linear memaksimumkan

dengan kendala

.

1. Selesaikanlah masalah PL berikut dengan metode simpleks dua tahap.

Meminimumkan

Terhadap kendala

.